جامعة البعث	الاسم : براءة الأشقر .
كلية العلوم	المدة : ساعة ونصف
قسم الفيزياء	العلامة : 100درجة

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات/لطلاب السنة الثالثة قسم الرياضيات للعام الدراسي 2017

اختر اربعا من الأسئلة الاتية :

السؤال الأول (25درجة)

برهن أن معامل الانتشار يعطى بالعلاقة الاتية :

$$\frac{\mu}{D} = \frac{q}{KT}$$

السؤال الثاني (25درجة)

برهن أنه اذا كانت الدوال الأساسية في فضاء هلبرت هي دوال ذاتية لمؤثر هرميتي معين فان هذه الدوال هي دوال متعامدة .

السؤال الثالث (25 درجة)

ما هو احتمال وجود جسيم يتحرك في الاتجاه x في المجال $\left[x\,.\,0 \rightarrow \frac{a}{2}\right]$ حيث أن الدالة الموجية له هي

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{2\pi x}{a}$$

السؤال الرابع (25 درجة)

برهن ان قانون انحفاظ الشحنة (معادلة الاستمرارية) يعطى بالعلاقة الاتية :

$$\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

السؤال الخامس (25 درجة)

احسب الحقل المغناطيسي المتولد عن حلقة دائرية في نقطة تقع على محورها.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د . فيصل مدهن

[illegible]

[illegible] (25 درجة)

لنفرض أنه لدينا غاز مكون من الشحن ... حيث أنه يتواجد ضمن حقل كهربائي E على الغاز بواسطة ... ولتكن $n(x)$ عدد الشوارد في واحدة الحجم على مسافة قدرها x من نهاية الوعاء. ونفترض أن q هي شحنة الأيون، فإن الطاقة الكامنة عند المسافة $x=0$ هي:

$$\varepsilon(x) = -qE_x$$

ونشترط أن تركيز الشوارد غير كبير حتى لا يؤثر على تجانس الحقل الكهربائي. وبسبب تدرج الطاقة سيكون هناك تدرج في تركيز الشوارد للغاز. باستخدام عامل بولتزمان (احتمال الإشغال النسبي) ... يمكن أن نكتب العلاقة:

$$\frac{n(x)}{n(0)} = e^{\frac{-\varepsilon_x}{KT}} = e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

حيث $n(0)$ هي تركيز الشوارد عند $x=0$ و T هي درجة حرارة الغاز.

ونفرض أن حركية الشوارد μ لذلك سوف تتحرك بسرعة μE في اتجاه الحقل ... وبالتالي هناك تيار جارف للشوارد وفي المحور x سيكون قيمته في واحدة المساحة في الزمن هي:

$$J_d = n(x)\cdot\mu E$$

وإذا كان معامل الانتشار D العائد للشوارد، فسيوجد تيار انتشار لها عبر واحدة المساحة عند مسافة x يساوي إلى:

$$J_D = -D\frac{dn(x)}{dx}$$

وهي مقارنة في واحدة الزمن في اتجاه تدرج التركيز، وفي حالتنا هذه لا يوجد تدفق للتيار، لأنه لن يكون هناك محصلة لحركة الشوارد وبالتالي:

$$J_d + J_D = 0$$

ومن المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$(*) \quad n(x)\mu E = D\frac{dn(x)}{dx}$$

لنأخذ قيمة $n(x)$ من عبارة الاحتمال النسبي ثم نشتقها فنجد:

$$\frac{dn(x)}{dx} = n(0)\frac{qE}{KT}e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

لنعوض هذه القيمة في العلاقة (*) نجد:

$$n(x)\mu E = D\cdot n(0)\frac{qE}{KT}\cdot e^{\frac{qE_x}{KT}}$$

وبالتالي:

$$\mu E = D\cdot\frac{qE}{KT} \Rightarrow \frac{\mu}{D} = \frac{q}{KT}$$

السؤال ... (... درجة)

برهن أن الدوال الذاتية ... لمؤثر هرميتي $\hat{A}$ ...

$$\hat{A}u_n = a_n u_n \quad \text{الأولى}$$

$$\hat{A}u_m = a_m u_n \quad \text{الثانية}$$

حيث أن $a_n \neq a_m$

نضرب المعادلة الأولى بالدالة u_m^* ونكامل مع كل الفضاء.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* \hat{A} u_n \, dx = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx$$

نأخذ المرافق العقدي للمعادلة الثانية فنحصل على:

$$\hat{A}^* u_m^* = a_m^* u_m^* = a_m u_m^* \quad \text{الثالثة}$$

وذلك لأن a_m مقدار حقيقي (لكونه قيمة ذاتية لمؤثر هرميتي). لنضرب المعادلة الأخيرة من اليمين بالدالة u_n ونكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^* u_m^* u_n \, dx = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx \quad \text{الرابعة.}$$

لأن $\hat{A}$ مؤثر هرميتي، لذلك فإن الطرف الأيسر للمعادلة الثالثة يساوي الطرف الأيسر للمعادلة الرابعة. وعليه فإن

$$a_m \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx$$

أو

$$(a_m - a_n) \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx = 0$$

وحيث أن $a_m \neq a_n$ فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n \, dx = 0$$

أي أن u_m و u_n متعامدتان (لأن الضرب العددي لأي متجهين متعامدين يساوي الصفر.

السؤال الثاني (25 درجة)

$$\text{الاحتمال} \quad \int_0^{\frac{1}{2}a} \psi \psi^* dx = \int_0^{\frac{1}{2}a} \psi^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}a} \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{2\pi x}{a} \, dx$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{1}{2}a} \left(\sin \frac{2\pi x}{a}\right)^2 dx =$$

$$\frac{2}{a} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2 \cdot 2\pi x}{a} \right]_0^{\frac{1}{2}a}$$

وباستخدام تكامل

$$\int_0^a \sin^2 bx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4b} \sin(2bx) - 0 \quad \left(\text{وهنا } b = \frac{2\pi}{a}\right).$$

إذن

$$\text{الاحتمال} = \frac{2}{a} \left[\frac{a}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{2\pi} \sin \frac{4\pi a}{2a} - 0 \right]$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

ان الشحنة الكلية في حجم ما تساوي

$$Q = \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

وان التيار الكلي يرتبط بهذه الشحنة بالعلاقة

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

الاشارة السالبة تدل على ان الشحنة في الحجم تتناقص مع مرور الزمن وحيث ان مرور الشحنة يكون خارجا عبر السطح المغلق يساوي مقدار التناقص في الشحنة الموجودة ضمن السطح وبالتالي فان العلاقة السابقة تصبح

$$I = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

نلاحظ ان التفاضل الكلي قد تحول الى تفاضل جزئي وذلك بسبب ان كثافة الشحنة الحجمية ρ هي دالة للموضع ايضا. ولما كان التيار الكلي I يرتبط بكثافة التيار $\vec{J}$ بالعلاقة

$$I = \int_{s} J \, ds$$

ينتج ان

$$\int_{s} \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

وبالاعتماد على مبرهنة گاوس او مبرهنة الانفراج يكون لدينا

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} \, d\tau = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

وحيث ان الحجم اختياري فان التكاملين يتساويان فيصبح لدينا

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$ وهي معادلة الاستمرارية.

س٥ (25 درجة).

لنحسب حقل التحريض المغناطيسي المتولد من عنصر التيار $(I\,dl)$ في النقطة (P) باعتبار ان المتجه $(I\,dl)$ والمتجه $\hat{r}$ متعامدين فان كلا من المتجهين يكون عموديا على مستوى نصف القطر (R) وبالتالي فان المستوى الذي يحوي نصف القطر والنقطة P واعتمادا على قانون بايوت وسافارت نكتب

$$dB = \frac{\mu_0 I \, dl}{4\pi r^2}$$

ويكون اتجاه dB عموديا على كل من $(\hat{r}, I\,dl)$.

اما العنصر $(I \cdot dl)$ الواقع في الاتجاه المقابل للعنصر $(I\,dl)$ قطريا والذي يمر فيه تيار معاكس يتولد حقلا dB' في النقطة (P) وان كلا الحقلين لهما مركبتين احداهما عمودية على مستوى الحلقة والاخرى عمودية على محور موازٍ لمستوى الحلقة.

وتكون محصلة المركبتين (dB_y, dB_y) العائدتين للحقلين (dB, dB') متساويتين كونهما متساويتين بالقيمة ومختلفتين بالاتجاه (بالاشارة). بينما المركبتان (dB_x, dB'_x) متساويتان الى تعاملهما، لذلك يكون حقل التحريض الكلي مساويا

$$B = \int dB \sin\alpha$$

[illegible]

[illegible]

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl \sin\alpha}{r^2}$$

بما أن (I , dl) على محيط الدائرة ثابتة لأن r و الزاوية (α) تبقى ثابتة لأن (dl) تبقى عمودية على [illegible] الحلقة [illegible] خارج إشارة التكامل أي تصبح المعادلة السابقة [illegible]

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\alpha}{r^2} \int dl$$

ولكن $\int dl = 2\pi R$ (محيط الدائرة).

إذن

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin\alpha}{r^2} R$$

ومن الشكل نجد:

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}$$

$$r^2 = R^2 + a^2$$

نعوض عن كل من $\sin\alpha$ و r^2 تصبح العلاقة

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}$$

مدرس المقرر.

د. [illegible]